SKUP CIJELIH BROJEVA

Skup N_0 sastoji se od svih prirodnih brojeva i 0.

$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

U svakodnevnom životu često upotrebljavamo i brojeve koji imajuznak „minus“ ispred sebe. Takve brojeve nazivamo **negativni brojevi.** U 16. stoljeću matematičari su negativne brojeve zvali numeri falsi ili ficti (lažni brojevi).

Negativni brojevi nam trebaju da bismo primjerice znali pročitati temperaturu na termometru.

U proljeće i ljeto je toplo te temperature na termometru mogu iznositi i do 38°. Suprotno proljetnim i ljetnim temperaturama, zimi je hladno i temperatura se spusti ispod nule. Primjerice, ponekad se u Karlovcu temperatura zna spustiti i 13 stupnjeva ispod nule. Tada kažemo, temperatura je minus 13°C i pišemo – 13°C.

Vremenska prognoza

	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedjelja	Ponedjeljak
Zagreb	-4°C /-1°C	-5°C /-2°C	-10°C /-3°C	-12°C /-3°C	-13°C /-2°C	-11°C /-1°C	-10°C /0°C
Osijek	-5°C /-1°C	-6°C /-2°C	-10°C /-2°C	-12°C /-3°C	-12°C /-2°C	-9°C /0°C	-7°C /1°C
Karlovac	-4°C/-1°C	-5°C /-2°C	-10°C /-3°C	-13°C /-3°C	-13°C /-3°C	-11°C /-1°C	-10°C /0°C

S negativnim brojevima ste se već susreli i na satu Geografije kada ste govorili o nadmorskoj visini mjesta ispod razine mora. Naime, ukoliko se i dno i površina jezera nađu ispod razine mora govorimo o depresiji. Nadmorska visina Mrtvog mora je – 400 m.

Ponekad nam negativni brojevi trebaju i kada želimo reći koliko nam je stanje na računu u banci.

Ako na računu u banci imamo 320 kuna, onda smo u „plusu“, ali ako potrošimo sav novac i još 100 kuna, onda smo u „minusu“. U tom slučaju nam na računu piše – 50 kuna.

Primjer 1.

Na Internet stranicama Hrvatskog hidrometeorološkog zavoda vidljive su jutarnje temperature nekih gradova Hrvatske na današnji dan. Izmjerene temperature su:

Zagreb (-2°C), Karlovac (-3°C), Split (12°C), Osijek (-9°C), Varaždin (0°C), Dubrovnik (15°C), Pula (8°C), Ogulin(-8°C), Zadar(9°C), Gospić(-11°C).

U kojem gradu je bilo najtoplije? U kojem najhladnije?

Iz navedenih podataka vidimo da je najtoplije bilo u Dubrovniku (15°C), a najhladnije u Gospiću (-11°C).

e-mail: danielamarcet@gmail.com

Podijelimo gradove u tri grupe prema temperaturi:

Gradovi s temperaturom ispod nule (°C)	Gradovi s temperaturom iznad nule (°C)	Gradovi s temperaturom 0°C
Zagreb -2	Split 12	Varaždin
Karlovac -3	Dubrovnik 15	
Osijek -9	Pula 8	
Ogulin -8	Zadar 9	
Gospić -11		

Temperature iznad nule (topli gradovi) zapisali smo **pozitivnim** cijelim brojevima. Pozitivni cijeli brojevi su: 1, 2, 3, 4, 5, … Pozitivni cijeli brojevi su prirodni brojevi.

Temperature ispod nule (hladni gradovi) zapisali smo brojevima ispred kojih se nalazi znak „minus“: -2, -3, -8, … ove brojeve nazivamo **negativnim** cijelim brojevima. Negativnim brojevima opisujemo **suprotne vrijednosti** od onih opisanih pozitivnim brojevima.

U Varaždinu je temperatura iznosila 0°C.

Za opisivanje i proučavanje veličina kao što su temperatura, nadmorska visina, vodostaj rijeka ili poslovanje s novcem nisu nam dovoljni prirodni brojevi. Stoga je trebalo uvesti 0 i negativne cijele brojeve. Svi ovi brojevi zajedno zovu se cijeli brojevi.

Skup svih cijelih brojeva označava se velikim slovom $\mathbb{Z}$ i sastoji se od negativnih cijelih brojeva, nule i prirodnih brojeva.

Pišemo: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. (Tri točkice na početku označavaju da niz nije počeo brojem -3, već da se prije njega nalaze brojevi -4, -5, -6 itd.)

Skup pozitivnih cijelih brojeva je $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Skup negativnih cijelih brojeva je $\mathbb{Z}^{-} = \{-1, -2, -3, \dots\}$

Skup prirodnih brojeva je podskup skupa cijelih brojeva. Pišemo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ne postoji ni najmanji ni najveći cijeli broj. Cijelih brojeva ima beskonačno mnogo.

Svaki cijeli broj u skupu $\mathbb{Z}$ ima svog neposrednog prethodnika.

Neposredni prethodnik broja 5 je broj 4.

Neposredni prethodnik broja -2 je broj -3.

Svaki cijeli broj u skupu $\mathbb{Z}$ ima svog neposrednog sljedbenika.

Neposredni sljedbenik broja 5 je 6.

Neposredni sljedbenik broja -2 je broj -1.

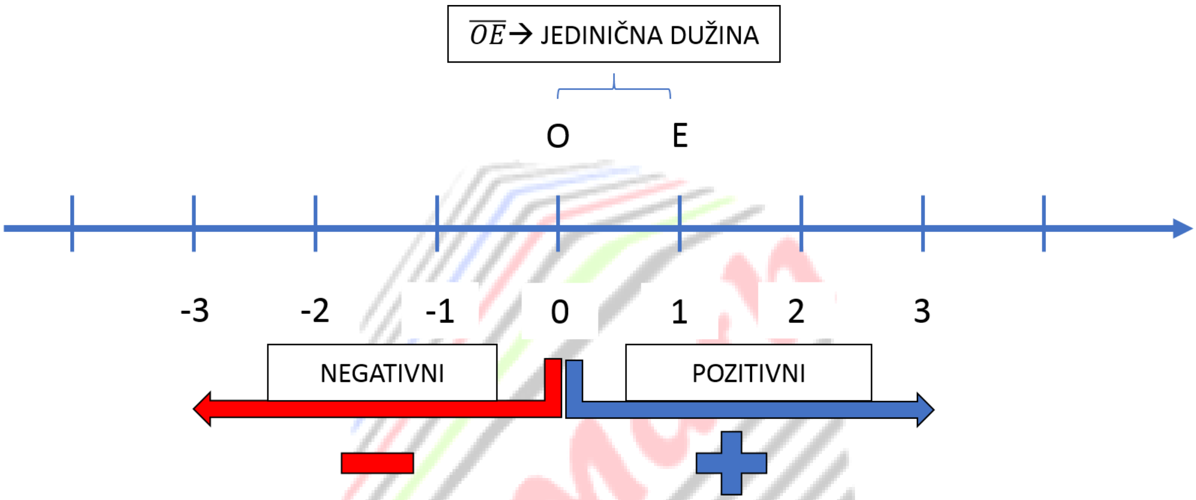
CIJELI BROJEVI I BROJEVNI PRAVAC

Cijele brojeve možemo prikazati na brojevnom pravcu isto kao što smo do sada prikazivali prirodne brojeve i razlomke, samo što ovoga puta moramo paziti na negativne cijele brojeve.

Uvijek nam može biti podsjetnik termometar. Ako je temperatura zraka negativna, onda nam je živa temrmometra ispod nule, a ako je pozitivna, onda je iznad nule.

Na brojevnom pravcu:

- Točke pridružene pozitivnim cijelim brojevima nalaze se desno od točke pridružene broju nula.
- Točke pridružene negativnim cijelim brojevima načaze se lijevo od točke pridružene broju nula.



Primjer 1.

Prikaži sljedeće cijele brojeve na brojevnom pravcu: -5. -2, 3,4.

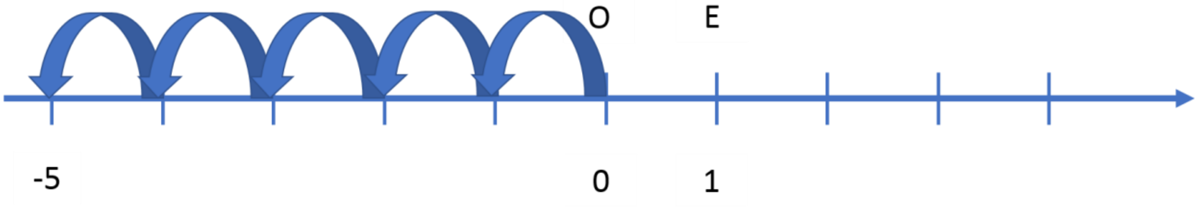
Rješenje:

Prvo moramo odrediti jediničnu dužinu $|OE| = 1$cm kako bismo znali udaljenost među brojevima na brojevnom pravcu.

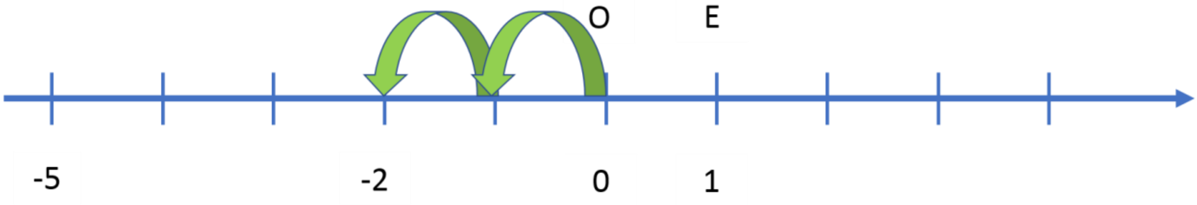
(„minus" ispred broja mi kaže da moram ići lijevo od 0 onoliko jediničnih duljina kolika je vrijednost broja poslije minusa, ako nema „minusa" tj broj je pozitivan moramo ići desno od 0 onoliko jediničnih duljina kolika je vrijednost broja)

Pridružimo broju -5 točku na brojevnom pravcu:

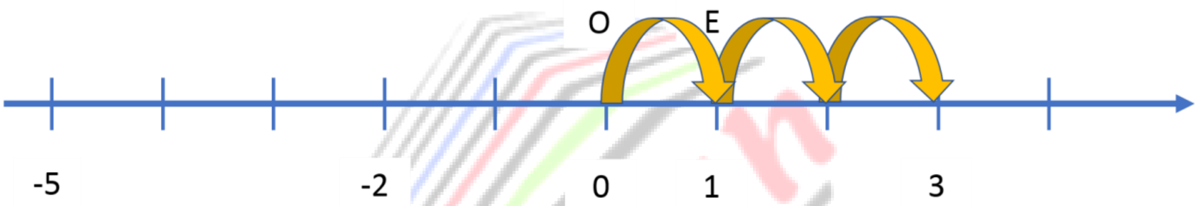
e-mail: danielamarcet@gmail.com



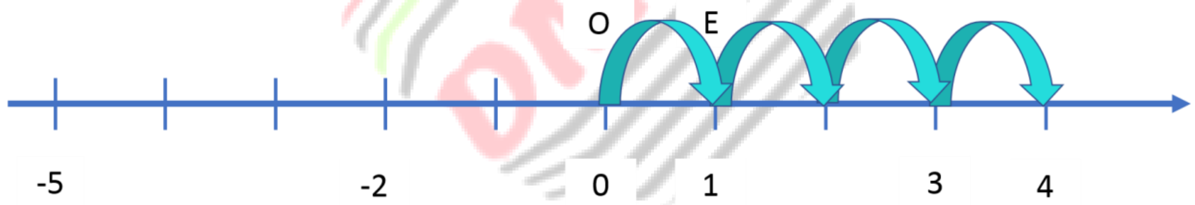
Pridružimo broju -2 točku na brojevnom pravcu:



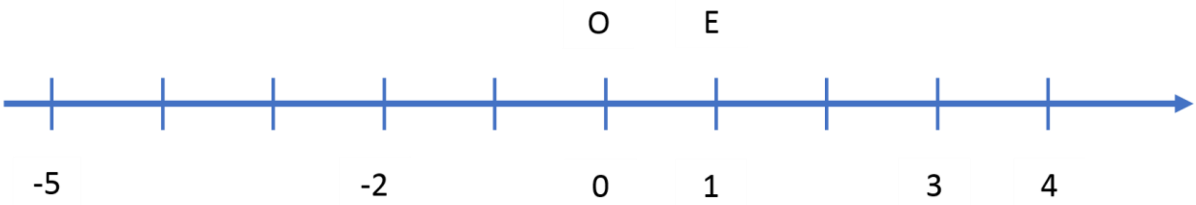
Pridružimo broju 3 točku na brojevnom pravcu:



Pridružimo broju 4 točku na brojevnom pravcu:



Dakle traženo rješenje je:



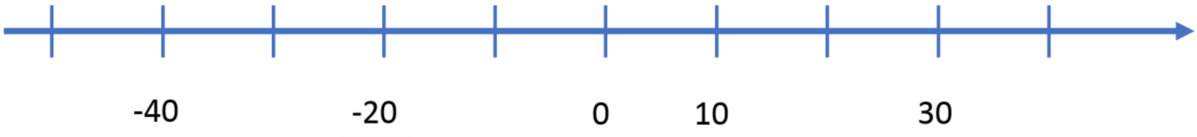
e-mail: danielamarcet@gmail.com

Primjer 2.

Pridruži redom slova A, B, C, D, E cijelim brojevima: -40, -20, 0, 10, 30.

Rješenje:

Ako su nam zadani veliki cijeli brojevi, jedinična dužina $\overline{OE}$ je jako mala i ne naznačavamo je na brojevnom pravcu. Razmak među brojevima ovisi o brojevima koje moramo prikazati. U našem zadatku uzet ćemo da nam 1 cm obuhvaća po 10 cijelih brojeva. (razmak između susjedne dvije crtice nam obuhvaća 10 cijelih brojeva).



SUPROTNI BROJEVI. APSOLUTNA VRIJEDNOST CIJELOG BROJA.

Suprotni brojevi su brojevi koji su simetrično smješteni na brojevnom pravcu u odnosu na 0.

Suprotan broj cijelog broja z označavamo s $-z$. („minus“ čitamo kao suprotno)

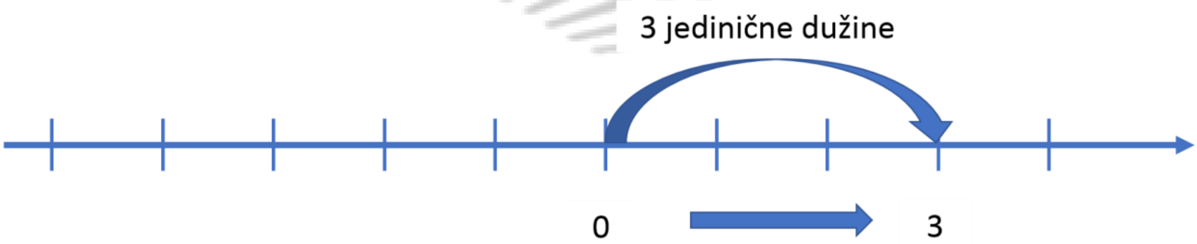
Primjer 1.

Koji je broj suprotan broju 3?

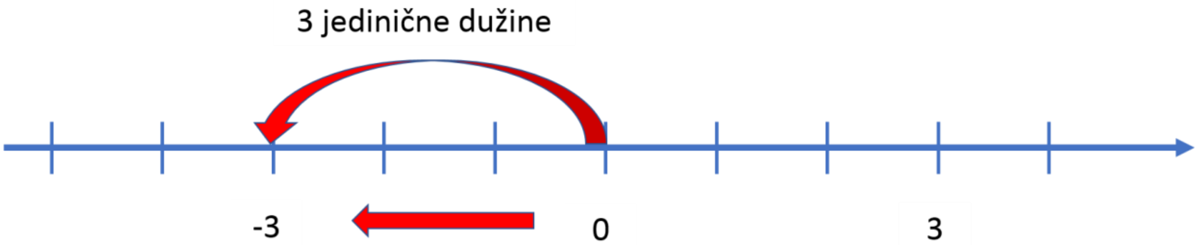
Rješenje:

Pogledajmo na brojevnom pravcu:

Broj 3 nalazi se za tri jedinične dužine desno od nule.



Suprotni broj broja 3 se nalazi za tri jedinične dužine lijevo od nule.



Dakle suprotan broj je -3.

Dakle, ukoliko trebamo odrediti suprotan broj nekog cijelog broja z, dovoljno je ispred cijelog broja staviti znak - .

Npr. ako je zadan cijeli broj 17 onda je suprotan broj broja 17 broj -17.

<u>Primjer 2.</u>

Koji su brojevi suprotni brojevima:

a) -15
b) $-(-7)$
c) $-\left(-(-(17))\right)$
d) $-\left(-\left(-(-(-21))\right)\right)$

Rješenje:

a) $z = -15 \qquad \Rightarrow \; -z = -(-15) = 15$

Ako je cijeli broj – 15, onda je njemu suprotan broj $-(-15)$, odnosno dodamo mu još jedan $-$. (Ispred zagrade je manje (-), zagrada mijenja stanje.)

Prvo se moramo riješiti „viška“ minusa, te onda odrediti suprotan broj.

Pamtimo da **neparan broj** minusa daje **minus**, a **paran broj** minusa daje **plus**. Stoga je dovoljno prebrojiti minuse i odrediti hoće li ukupan predznak na kraju biti – ili +.

b) $z = -(-7) = (imamo\ 2\ minusa \rightarrow +) = 7 \qquad \Rightarrow \; -z = -7$

c) $z = -\left(-(-(17))\right) = (imamo\ 3\ minusa \rightarrow -) = -17 \qquad \Rightarrow \; -z = -(-17) = 17$

d) $z = -\left(-\left(-(-(-21))\right)\right) = (imamo\ 5\ minusa \rightarrow -) = -21 \qquad \Rightarrow -z = -(-21) = 21$

Svaki cijeli broj ima točno jedan sebi suprotan broj.

IZUZETAK! Nula je samoj sebi suprotan broj.

Apsolutna vrijednost brojeva je **udaljenost** broja od ishodišta brojevnog pravca. Udaljenost cijelog broja od nule jednaka je udaljenosti točke pridružene tomu cijelom broju od točke pridružene nuli na brojevnom pravcu. Udaljenost cijelog broja od nule zove se **apsolutna vrijednost** ili **modul cijelog broja.**

Kako je udaljenost uvijek pozitivna, onda je i apsolutna vrijednost **uvijek pozitivan broj**. Apsolutnu vrijednost cijelog broja z označavamo sa $|z|$.

PAMTIMO!

Aposlutna vrijednost pozitivnog cijelog broja jednaka je tomu cijelom broju.

$$|z| = z, \text{za svaki } z \in \mathbb{Z}, z > 0.$$

Na primjer

$|13| = 13 \quad \rightarrow$ broj 13 se nalazi na brojevnom pravcu desno za 13 duljina jedinične dužine od 0, te je njegova apsolutna vrijednost 13.

Analogno vrijedi i za sljedeće primjere:

$|123| = 123, \qquad |3\,678| = 3\,678.$

PAMTIMO!

Apsolutna vrijednost negativnog cijelog broja jednaka je suprotnom broju tog cijelog broja.

$$|z| = -z, \text{za svaki } z \in \mathbb{Z}, z < 0.$$

Na primjer

$|-5| = -(-5) = 5 \rightarrow$ broj -5 se nalazi na brojevnom pravcu lijevo za 5 duljina jedinične dužine od 0, te je njegova apsolutna vrijednost 5

Analogno vrijedii za sljedeće primjere:

$|-23| = 23, \qquad |-571| = 571.$

PAMTIMO!

Apsolutna vrijednost broja 0 jednaka je nuli. Pišemo $|0| = 0$.

Apsolutna vrijednost bilo kojega cijelog broja je nenegativan broj → $|z| \geq 0, \text{za svaki } z \in \mathbb{Z}.$

Međusobno suprotni cijeli brojevi imaju jednake apsolutne vrijednosti. → $|z| = |-z|, \text{za svaki } z \in \mathbb{Z}.$

Na primjer:

$|-23| = |23| = 23$

$|-37| = |37| = 37$

$|-253| = |253| = 253.$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

<u>Primjer 3.</u>

Popuni tablicu:

z	-8	21	-(-5)	0	-(-(-1))
$\|z\|$					

Rješenje:

$|-8| = 8$

$|21| = 21$

$|-(-5)| = |5| = 5$

$|0| = 0$

$|-(-(-1))| = |-1| = 1$

z	-8	21	-(-5)	0	-(-(-1))
$\|z\|$	8	21	5	0	1

<u>Primjer 4.</u>

Nađi sve cijele brojeve sa svojstvom $|z| = 8$.

Rješenje:

Trebamo pronaći sve brojeve kojima je apsolutna vrijednost jednaka broju 8, odnosno sve one koji su od 0 udaljeni za 8 (gledam lijevo 8 jedniničnih dužina i desno 8 jediničnih dužina).

To su sigurno onda jedino brojevi -8 i 8, odnosno $z \in \{-8,8\}$.

<u>Primjer 5.</u>

Nađi sve cijele brjeve sa svojstvom $|z| \leq 4$.

Rješenje:

Trebamo pronaći sve brojeve kojima je apsolutna vrijednos manja ili jednaka broju 4, odnosno sve one koji su od 0 udaljeni 4 ili manje jedniničnih dužina od 0. (ponovno gledamo i lijevo i desno od 0)

To su sigurno brojevi 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, odnosno $z \in \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4\}$.

e-mail: danielamarcet@gmail.com

USPOREĐIVANJE CIJELIH BROJEVA

PONOVIMO!

$$a < b \ \Rightarrow a \ je \ manji \ od \ b$$

$$a > b \ \Rightarrow a \ je \ veći \ od \ b$$

$$a = b \ \Rightarrow a \ je \ jednak \ b$$

Za uspoređivanje cijelih brojeva vrijede sljedeća svojstva.

- Za pozitivne cijele brojeve (prirodne brojeve) vrijedi:
$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$$
- Od **dva pozitivna** cijela broja **veći** je onaj koji ima **veću apsolutnu vrijednost**
  ako je $a > b$, onda je $|a| > |b|, a, b \in \mathbb{Z}^+$

  npr. $12 > 9$ i $|12| = 12 > |9| = 9$
- Svaki je pozitivan cijeli broj veći od nule i od svakog negativnog cijelog broja

  npr. $7 > 0,$ $13 > -5$
- Za negativne cijele brojeve vrijedi:
$$-1 > -2 > -3 > -4 > \cdots$$
- Od **dva negativna** cijela broja **veći** je onaj koji ima **manju apsolutnu vrijednost**
  ako je $a > b$, onda je $|a| < |b|, a, b \in \mathbb{Z}^-$

  npr. $-2 > -9$ i $|-2| = 2 < |-9| = 9$
- Svaki je negativni cijeli broj manji od nule i od svakog pozitivnog cijelog broja

  npr. $-17 < 0,$ $-3 < 5$

Poretku cijelih brojeva po veličini odgovara poredak tih brojeva na brojevnom pravcu.

Ako se cijeli broj a nalazi na brojevnom pravcu lijevo od cijelog broja b, onda je a manji od b.

<u>Primjer 1.</u>

Usporedi brojeve:

a) -13 i 25

b) 17 i 34

c) – 321 i -754

d) 27 i 0

e) 0 i -654

f) –(-7) i 17

e-mail: danielamarcet@gmail.com

Rješenja:

a) $-13 < 25$ Svaki negativni cijeli broj je uvijek manji od svakog pozitivnog cijelog broja.

b) $17 < 34$ Broj 17 je lijevo na brojevnom pravcu u odnosu na broj 34, pa je on manji.

(apsolutna vrijednost pozitivnog broja 17 je **manja** od apsolutne vrijednosti pozitivnog cijelog broja 34 pa je broj 17 **manji**)

c) $-321 > -754$ $|-321| = 321, |-754| = 754 \rightarrow 321 < 754$

Apsolutna vrijednost broja -321 je **manja** od apsolutne vrijednosti broja -754, pa je broj -321 **veći** od broja -754.

(možemo se sjetiti i da smo na početku cjeline rekli da na znak „-„ gledamo kao na suptorno, pa obzirom da imamo uspoređivanje dva negativna cijela broja, uspoređujemo apsolutne vrijednosti i uvijek za konačnu nejednakost uzmemo **suprotno** od onoga što smo dobili za njihove apsokutne vrijednosti)

d) $27 > 0$ Svaki pozitivan cijeli broj uvijek je veći od 0.

e) $0 > -654$ 0 je veća od svakog negativnog cijelog broja.

f) $-(-7) = 7 < 17$ Prvo moramo „srediti“ predznake kod prvog broja → $-(-7) = 7$, dakle uspoređujemo dva pozitivna cijela broja, 7 i 17, veći je onaj koji ima veću aposlutnu vrijednost.

<u>Primjer 2.</u>

Poredaj cijele brojeve po veličini od najmanjeg prema najvećem: -184, 51, -17, -53, 137, -57, 89.

Rješenje:

Prvo ćemo grupirati negativne i pozitivne cijele brojeve → -184, -17, -53, -57, 51, 137, 89

Gledamo negativne cijele brojeve i njihove apsolutne vrijednosti:

$|-184| = 184, \quad |-17| = 17, \quad |-53| = 53, \quad |-57| = 57$

Poredamo ih po veličini obzirom na njihove apsolutne vrijednosti. Obzirom da ih moramo poredati po veličini od najmanjeg prema najvećem, a uspoređujemo negativne brojeve, moramo ih poredati tako da je prvi onaj s najvećom apsolutnom vrijednosti, zatim je sljedeći po redu od presotalih onaj s najvećom apsolutnom vrjednosti itd.

Dobivamo: $-184 < -57 < -53 < -17$.

Pozitivni cijeli brojevi: $51 < 89 < 137$.

Stoga je traženo rješenje → $-184 < -57 < -53 < -17 < 51 < 89 < 137$.

Primjer 3.

Nađi sve cijele brojeve sa svojstvom $-4 \leq z < 3$.

Rješenje:

Rješenje zadatka su svi cijeli brojevi koji su veći ili jednaki -4 $(-4 \leq z)$, odnosno -4 je manji ili jednak cijelom broju koji moramo naći. Istodobno, ti brojevisu manji od broja 3 (ali nisu jednaki, jer imamo strogu nejednakost).

Dakle to su brojevi $z \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

ZBRAJANJE CIJELIH BROJEVA

Pri zbrajanju cijelih brojeva razlikujemo zbrajanje brojeva jednakih predznaka (zbrajanje pozitivnih cijelih brojeva te zbrajanje negativnih cijelih brojeva)i zbrajanje brojeva različitih predznaka (zbrajanje pozitivnog i negativnog cijelog broja).

Stoga je uvijek bitno prvo utvrditi o kojem zbrajanju je riječ, a zatim postupiti po sljedećim pravilima zbrajanja:

Cijele brojeve jednakih predznaka zbrajamo tako da im zbrojimao apsolutne vrijednosti i zadržimo predznak tih pribrojnika.

$$16 + 32 = +48 = 48 \qquad jer\ je \qquad |16| + |32| = 16 + 32 = 48$$

(zbrajanje dva pozitivna cijela broja je isto što i zbrajanje prirodnih brojeva)

$$(-11) + (-8) = -19 \qquad jer\ je \qquad |-11| + |-8| = 11 + 8 = 19$$

Cijele brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da im odredimo apsolutne vrijednosti pa od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju apsolutnu vrijednost i zadržimo predznak pribrojnika s većom apsolutnom vrijednošću.

$$(-12) + 17 = +5 = 5 \qquad jer\ je \qquad |-12| = 12 < |17| = 17 \qquad 17 - 12 = 5$$

$$(-17) + 6 = -11 \qquad jer\ je \qquad |-17| = 17 > |6| = 6 \qquad 17 - 6 = 11$$

Za zbrajanje cijelih brojeva vrijede sljedeća svojstva:

- **Svojstvo zatvorenosti** računske operacije zbrajanja (zbroj svaka dva cijela broja je cijeli broj)

$$iz\ a, b \in \mathbb{Z}\ \ slijedi\ da\ je\ a + b \in \mathbb{Z}$$

- broj 0 je **neutralni element za zbrajanje**

$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}$$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

$$21+0=21 \qquad 0+(-5)=-5 \qquad 0+12=12 \qquad -13+0=-13$$

- **svojstvo komutativnosti ili svojstvo zamjene mjesta pribrojnicima**

$$a+b=b+a, \quad a,b \in \mathbb{Z}$$

$$3+5=5+3 \qquad -4+2=2+(-4) \qquad -1+(-3)=-3+(-1)$$

- **svojstvo asocijativnosti ili svojstvo udruživanja pribrojnika**

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$(-1+2)+4=-1+(2+4) \qquad (-3+7)+(-2)=-3+(7+(-2))$$

- **svojstvo suprotnog broja** (zbroj međusobno suprotnih cijelih brojeva jednak je nuli)

$$a+(-a)=-a+a=0 \ \ za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}$$

$$-3+3=0 \qquad -21+21=0$$

<u>Primjer 1.</u>

a) $(-5)+(-7)$

b) $(-5)+(-2)+(-7)$

c) $9+(-5)$

d) $-19+5$

e) $45+(-45)$

f) $-5+(-7)+3$

g) $5+12+(-21)+(-7)$

h) $-12+7+(-5)+9$

Rješenje:

a) $(-5)+(-7)=-(|-5|+|-7|)=-(5+7)=-12$

> Brojevi su istog predznaka, pa predznak prepisujemo i zbrajamo njihove apsolutne vrijednosti

b) $(-5)+(-2)+(-7)=-(5+2+7)=-14$

c) $9+(-5)=+(7-2)=+5=5$

> Brojevi imaju različite predznake, prvo ćemo provjeriti koji broj ima veću apsolutnu vrijednost:
>
> $$|9|=9, \ \ |-5|=5, \quad 9>5$$
>
> Broj 9 je veći po apsolutnoj vrijednosti pa uzimamo njegov predznak, a to je „+“. Oduzimamo po apsolutnoj vrijednosti manji broj od broja veće apsolutne vrijednosti, tj 9-5

e-mail: danielamarcet@gmail.com

d) $-19+5 = -(19-5) = -14$

Brojevi imaju različite predznake. Provjeravamo koji broj ima veću apsolutnu vrijednost:

$$|-19| = 19, \quad |5| = 5, \qquad 19 > 5$$

Broj -19 je veći po apsolutnoj vrijednosti pa uzimamo njegov predznak, a to je „-“. Oduzimamo po apsolutnoj vrijednosti manji broj od broja veće apsolutne vrijednosti, tj 19-5

e) $45 + (-45) = 0$ → brojevi 45 i – 45 su suprotni brojevi pa je njihov zbroj jednak 0.

f) $-5 + (-7) + 3 = -(5+7) + 3 = -12 + 3 = -(12-3) = -9$

Ako u zadatku imamo više brojeva različitih predznaka, najbolje je prvo zbrojiti sve one istog predznaka (predznak prepišemo, a zbrojimo njihove apsolutne vrijednosti), dakle grupiramo negativne cijele brojeve i pozitivne cijele brojeve. Na kraju nam ostane zbroj dva cijela broja različitih predznaka.

g) $\mathbf{5} + \mathbf{12} + (-\mathbf{21}) + (-\mathbf{7}) = -(\mathbf{21} + \mathbf{7}) + (\mathbf{5} + \mathbf{12}) = -28 + 17 = -11$

h) $-12 + 7 + (-5) + 9 = -17 + 16 = -1$

ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Broj b oduzimamo od broja a tako da broju a pribrojimo suprotan broj broja b.

$$a - b = a + (-b), \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

Npr.

$5 - 12 = 5 + (-12) = -7$

$-4 - 9 = -4 + (-9) = -13$

$7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

$-7 - (-6) = -7 + 6 = -1$

Vrijedi i sljedeće

$$a + (-b) = a - b, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$5 + (-9) = 5 - 9 = -4$ $\qquad 10 + (-5) = 10 - 5 = 5$ $\qquad -5 + (-3) = 5 - 3 = -8$

Za zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva vrijedi sljedeće:

- odzumemo li od zbroja dvaju brojeva jedan pribrojnik, dobiti ćemo drugi pribrojnik (**veza zbrajanja i oduzimanja)**

$$iz\ \ a+b=c\ \ slijedi\quad c-a=b\ \ i\quad c-b=a,\quad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

$$-20+7=-13\ \ \rightarrow\quad -13-(-20)=-13+20=7,\quad -13-7=-20$$

- zbrojimo li razliku dvaju brojeva s umanjiteljem, dobiti ćemo umanjenik.

$$iz\ \ a-b=c\ \ slijedi\quad c+b=a\quad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

$$-7-12=-19\quad\rightarrow\quad -19+12=-7$$

- oduzmemo li od umanjenika razliku, dobit ćemo umanjitelj

$$iz\ \ a-b=c\ \ slijedi\quad a-c=b\quad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

$$7-(-13)=20\ \ \rightarrow\ \ 7-20=-13$$

KORISNO ZAPAMTITI!

Kada se uzadatku nađe više pribrojnika, korisno je najprije zbrojiti one istog predznaka (posebno sve negativne, te posebno sve pozitivne cijele brojeve), a potom odrediti zbroj (razliku)tako dobivenih cijelih brojeva različitih predznaka.

RAD SA ZAGRADAMA

Za rad sa zagradama vrijede sljedeća pravila:

- Ako se u nekom izrazu pojavi zagrada ispred koje je znak – **(minus)**, zagradu i taj minus izostavit ćemo, a svim brojevima iz zagrade promijeniti predznak.

$$a-(-b+c)=a+b-c,\qquad a-(b-c)=a-b+c,\qquad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$-3-(-4+5)=-3+4-5=-8+4=-4$

$5-(2-3)=5-2+3=8-2=6$

(ispred zagrade je manje, u zagradi se mijenja stanje)

- Ako se u nekom izrazu pojavi zagrada ispred koje je znak + (plus), zagradu i taj plus izostavit ćemo, a brojeve iz zagrade prepisati nepromijenjene.

$$a+(b-c)=a+b-c,\qquad a+(-b+c)=a-b+c,\qquad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$5+(2-3)=5+2-3=7-3=4$

$-3+(-4+5)=-3-4+5=-7+5=-2$

(ispred zagrade je više, zagrada se briše)

Ukoliko se ubrojevnom izrazu pojavi više zagrada, moramo se pridržavati pravila da prvo rješavamo unutarnje zagrade, odnosno koristimo princip „iznutra prema van“

Primjer 1.

Oslobodi se prvozagrada, a zatimizračunaj:

a) $-23+(-2+26)$

b) $-(5-9)+(-7+2)$

c) $-4-(9-2)+(-1+4-5)$

Rješenje:

a) $-23+(-2+26)=-23-2+26=-25+26=1$

Ispred zagrade je +, pa zagradu i + mičemo i prepisujemo izraz iz zagrade onakav kakav je

b) $-(5-9)+(-7+2)=-5+9-7+2=-12+11=-1$

Ispred prve zagrade je -, pa zagradu i – mičemo i prepisujemo suptorno od onoga što se nalazilo u zagradi, ispred druge zagrade je +, pa zagradu i + mičemo i prepisujemo izraz iz zagrade onakav kakav je

c) $-4-(9-2)+(-1+4-5)=-4-9+2-1+4-5=-15+2=-13$

MNOŽENJE CIJELIH BROJEVA

Cijeli broj množimo s cijelim brojem tako daim pomnožimo apsolutne vrijednosti, a predznak umnoška određuje se prema sljedećim pravilima.

- Umnožak cijelih brojeva bit će pozitivan ako suoba faktora pozitivni ili oba faktora negativni cijeli brojevi (tj. faktori su jednakih predznaka).

$$(+)\cdot(+)=(+) \qquad (-)\cdot(-)=(+)$$

$$4\cdot 9=36 \qquad (-5)\cdot(-3)=15$$

- Umnožak cijelih brojeva bit će negativan ako je jedan faktor pozitivan, a drugi faktor negativan cijeli broj (tj. faktori su različitih predznaka).

$$(+)\cdot(-)=(-) \qquad\qquad (-)\cdot(+)=(-)$$

$$-4\cdot 9=-36 \qquad\qquad 5\cdot(-3)=-15$$

- Ako je broj minusa u umnošku paran, umnožak je pozitivan. Ako je broj minusa u umnošku neparan, umnožak je negativan.

Za množenje u skupu $\mathbb{Z}$ vrijede sljedeća svojstva:

- **Svojstvo zatvorenosti** računske operacije množenja (umnožak dvaju cijelih brojeva je cijeli broj)

$$iz \quad a,b\in\mathbb{Z} \;\; slijedi\ da\ je \quad a\cdot b\ \in\mathbb{Z}$$

- **Umnožak svakog cijelog broja i broja 0 jednak je 0**

$$a\cdot 0=0\cdot a=0, za\ svaki\ a\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$5\cdot 0=0 \qquad 0\cdot(-124)=0$$

- Vrijedi još: $0\cdot 0=0$

- Umnožak svakog cijelog broja i broja 1 jednak je tomu cijelom broju (broj 1 je **neutralni element za množenje**)

$$a\cdot 1=1\cdot a=a, \quad za\ svaki\ a\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$23\cdot 1=23 \qquad -5\cdot 1=-5 \qquad 1\cdot(-2)=-2 \qquad 1\cdot 7=7$$

- **Svojstvo komutativnosti ili svojstvo zamjene mjesta faktorima**

$$a\cdot b=b\cdot a, \quad a,b\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$12\cdot(-2)=-2\cdot 12 \qquad\qquad -17\cdot(-21)=-21\cdot(-17)$$

- **Svojstvo asocijativnosti ili svojstvo udruživanja faktora**

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c), \qquad a,b,c\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$(5\cdot 3)\cdot(-2)=5\cdot\big(3\cdot(-2)\big) \qquad\qquad (-2\cdot 3)\cdot(-4)=-2\cdot(3\cdot(-4))$$

- **Svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju (i oduzimanju)**

e-mail: danielamarcet@gmail.com

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b},$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{Z}$$

npr.

$$(-3+4)\cdot 2=-3\cdot 2+4\cdot 2 \qquad\qquad -3\cdot(7-2)=-3\cdot 7-(-3)\cdot 2$$

- Rezultat množenja bilo kojeg cijelog broja, različitog od nule, i broja -1 je suprotan brojtoga cijelog broja

$$a\cdot(-1)=-1\cdot a=-a, \quad za\ svaki\ a\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$5\cdot(-1)=-5 \qquad -1\cdot(-3)=3$$

- **Izlučivanje zajedničkog faktora**

$$c\cdot a+c\cdot b=c\cdot(a+b) \quad i \quad a\cdot c+b\cdot c=(a+b)\cdot c$$
$$c\cdot a-c\cdot a=c\cdot(a-b) \;\; i \;\; a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c, \;\; a,b,c\in\mathbb{Z}$$

Npr.

$$(-2)\cdot 4+(-2)\cdot 7=(-2)\cdot(4+7) \qquad\qquad 6\cdot a-12\cdot a=(6-12)\cdot a$$

Posljedica tih svojstava je i pravilo za množenje zbroja ili razlike cijelih brojeva zbrojem ili razlikom cijelih brojeva prema kojemu se svaki član jedne zagrade pomnoži sa svakim članom druge zagrade, a potom se dobiveni umnošci zbroje (ili oduzmu).

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

Npr.

$$(8+3)\cdot(4-5)=8\cdot 4-8\cdot 5+3\cdot 4-3\cdot 5=32-40+14-15=46-55=-11$$

Primjer 1.

Izračunaj:

a) $-7\ \cdot(-4)$

b) $3\ \cdot(-12)$

c) $-3\cdot(-2)\cdot 6$

d) $2\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-1)$

e) $-4\cdot(-12-3)$

f) $(-23+5)\cdot 2$

g) $-2\cdot(-11+4)+(-13-2)\cdot(-5)$

Rješenje:

a) $-7\cdot(-4)=+(7\ \cdot 4)=28$

b) $3\cdot(-12)=-(3\cdot 12)=-36$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

c) $-3 \cdot (-2) \cdot 6 = +(3 \cdot 2 \cdot 6) = 36$

d) $2 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-1) = -(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1) = -30$

e) $-4 \cdot (-12 - 3) = -4 \cdot (-15) = +(4 \cdot 15) = 60$

f) $(-23 + 5) \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -(18 \cdot 2) = -36$

g) $-2 \cdot (-11 + 4) + (-13 - 2) \cdot (-5) = -2 \cdot (-7) + (-15) \cdot (-5) = 14 + 75 = 89$

DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Cijeli broj dijelimo cijelim brojem tako da apsolutnu vrijednost djeljenika podijelimo apsolutnom vrijednošću djelitelja (ako je to moguće), a predznak količnika određujemo prema sljedećim pravilima:

- Količnik cijelih brojeva bit će pozitivan ako su i djeljenik i djelitelj pozitivni ili i djeljenik i djelitelj negativni cijeli brojevi (tj. djeljenik i djelitelj jednakih su predznaka)

$$(+) : (+) = + \qquad (-) : (-) = +$$

$$36 : 4 = 9 \qquad (-54) : (-9) = 6$$

- Količnik cijelih brojeva bit će negativan ako je djeljenik pozitivan, a djelitelj negativan ili djeljenik negativan, a djelitelj pozitivan cijeli broj (tj. djeljenik i djelitelj različitih su predznaka)

$$(+) : (-) = - \qquad (-) : (+) = -$$

$$35 : (-7) = -5 \qquad 20 : (-2) = -10$$

Za dijeljenje u skupu $\mathbb{Z}$ vrijede sljedeća svojstva.

- Djelitelj uvijek mora biti različit od nule jer dijeljenje brojem 0 nije provedivo
- Količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj
- Količnik dvaju cijelih brojeva bit će cijeli broj samo ako je djeljenik vipekratnik djelitelja
- Rezultat dijeljenja bilo kojeg cijelog broja brojem 1 jednak je tomu cijelom broju

$$a : 1 = a, \quad za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}$$

$$12 : 1 = 12 \qquad -7 : 1 = -7$$

- Rezultat dijeljenja bilo kojeg cijelog broja brojem -1 jednak je suprotnom broju toga cijelog broja

$$a : (-1) = -a, \quad za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}$$

$$5 : (-1) = -5 \qquad -6 : (-1) = 6$$

- Rezultat dijeljenja bilo kojega cijelog broja, različita od nule, samim sobom jednak je broju 1

$$a : a = 1\,, za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

$$37 : 37 = 1 \qquad -9 : (-9) = 1$$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

- Rezultat dijeljenja broja 0 bilo kojim cijelim brojem, različitim od nule, jednak je nuli

$$0 : a = 0, za\ svaki\ a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

$$0 : 12 = 0 \qquad 0 : -5 = 0$$

Među računskim operacijama množenja i dijeljenja u skupu $\mathbb{Z}$ postoji veza koja je izražena sljedećim pravilima.

- Ako umnožak dvaju brojeva podijelimo jednim faktorom, dobit ćemo drugi faktor.

$$iz\ a \cdot b = c\ \ slijedi\ \ c : a = b\ \ i\ c : b = a, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ a, b \neq 0$$

$$5 \cdot (-4) = -20 \qquad -20 : 5 = -4 \qquad -20 : (-4) = 5$$

- Ako djeljenik podijelimo količnikom, dobiti ćemo djelitelj

$$iz\ a : b = c\ \ slijedi\ \ a : c = b, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ b, c \neq 0$$

$$-18 : 6 = -3 \qquad -18 : (-6) = 3$$

- Ako količnik dvaju brojeva pomnožimo djeliteljem, dobit ćemo djeljenik

$$iz\ a : b = c\ \ slijedi\ \ c\ \cdot b = a, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0$$

$$(-16) : (-2) = 8 \qquad 8\ \cdot (-2) = -16$$

Pravila za redoslijed izvođenja računskih radnji i rad sa zagradama u skupu cijelih brojeva jednaka je onima u skupu prirodnih brojeva.

Primjer 1.

Izračunaj:

a) $-36 : 6$

b) $88 : (-8)$

c) $-56 : (-8)$

d) $-138 : (-23)$

Rješenje:

a) $-36 : 6 = -(36 : 6 = -6$

b) $88 : (-8) = -(88 : 8) = -11$

c) $-56 : (-8) = +(56 : 8) = 7$

d) $-138 : (-23) = +(138 : 23) = 6$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

Primjer 2.

Izračunaj:

a) $13 \cdot (-2) + 20 : (-4)$

b) $-11 \cdot (-3) - 35 : (-7)$

c) $-4 - 10 : (-5) + 3 \cdot (-1) + 13$

d) $(-11 - 4) : 3 - 2 \cdot (4 - 13)$

Rješenje:

a) $13 \cdot (-2) + 20 : (-4) = -(13 \cdot 2) + \big(-(20 : 4)\big) = -26 + (-5) = -31$

b) $-11 \cdot (-3) - 35 : (-7) = +(11 \cdot 3) + (35 : 7) = 33 + 5 = 38$

c) $-4 - 10 : (-5) + 3 \cdot (-1) + 13 = -4 + (10 : 5) - (3 \cdot 1) + 13 =$

$= -4 + 2 - 3 + 13 = 15 - 7 = 8$

d) $(-11 - 4) : 3 - 2 \cdot (4 - 13) = -15 : 3 - 2 \cdot (-9) = -(15 : 3) + (2 \cdot 9) = -5 + 18 = 13$

IZLUČIVANJE ZAJEDNIČKOG FAKTORA

Izlučivanje zajedničkog faktora nije ništa drugo nego primjena **distributivnosti množenja prema zbrajanju/oduzimanju.**

Distributivnost množenja prema zbrajanju

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Primjer 1.

Izluči zajednički faktor $3x + 4x$.

Rješenje:

Usporedimo zapis s distributivnosti množenjaprema zbrajanju. Slovo x množi i broj 3 i broj 4, odnosno on je zajednički faktor u oba člana, stoga moramo izlučiti x, a brojeve zbrojiti.

$$3x + 4x = (3 + 4) \cdot x = 7 \cdot x = 7x$$

Primjer 2.

Pojednostavi izraz: $-4y + 9y + 3$.

Rješenje:

U izrazu prvo grupiramo one članove koji imaju zajednički faktor (y), te izlučujemo y.

$-4y + -9y + 3 = (-4 + 9) \cdot y + 3 = 5 \cdot y + 3 = 5y + 3$

e-mail: danielamarcet@gmail.com

Primjer 3.

Pojednostavi izraz : $-5+2b+7b+10$.

Rješenje:

$-5+2b+7b+10=2b+7b-5+10=(2+7)\cdot b-5+10=9b+5$

Grupiramo članove sa zajedničkim faktorom, a ostalo prepisujemo. Nakon grupiranja izlučujemo zajednički faktor b prava dva pribrojnika, a slobodne članove zbrajamo po pravilima zbrajanja cijelih brojeva.

Primjer 4.

Pojednostavi izraz:

a) $2x++13x$

b) $7a-23a+4a$

c) $-14b+13b+12b-23b$

Rješenje:

a) $2x++13x=(2+13)\ \cdot x=15x$

b) $7a-23a+4a=(7-23+4)\ \cdot a=(-23+11)\cdot a=-12a$

c) $-14b+13b+12b-23b=(-14+13+12-23)\cdot b=(-37+25)\cdot b=-12b$

Primjer 5.

Pojednostavi izraz:

a) $4x-5+2x$

b) $12y+3+14y-19$

c) $-4+15a-17a+7+3a$

Rješenje:

a) $4x-5+2x=4x+2x-5=x\cdot(4+2)-5=6x-5$

b) $12y+3+14y-19=12y+14y+3-19=(12+14)\cdot y+3-19=26y-16$

c) $-4+15a-17a+7+3a=15a-17a+3a-4+7=(15-17+3)\cdot a-4+7=a+3$

e-mail: danielamarcet@gmail.com